ANALIZA FUNKCJONALNA
LISTA 6

Przez H oznaczamy przestrzeń Hilberta nad ciałem rzeczywistym lub zespolonym.

1. Pokazać, że przestrzenią dualną do $X = c_0$ (nad ciałem rzeczywistym z normą supremum) jest $X^* = l^1$, wykazując, że

   (a) dowolny ograniczony funkcjonał liniowy $\varphi \in X^*$ ma postać
   $$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n$$
   gdzie $x = (x_n)$, natomiast $y_n = \varphi(e_n)$ dla każdego n, gdzie ciąg (e_n) jest bazą kanoniczną w c_0,

   (b) jeżeli ciąg liczb $y = (y_n)$ należy do l^1, to $\varphi \in X^*$, wykazując nierówność $|\varphi(x)| \leq \| y \|_1 \| x \|_\infty$

   (c) wywnioskować, że $\| \varphi \| \leq \| y \|_1$,

   (d) jeżeli $\varphi \in X^*$ oraz $y_n = \varphi(e_n)$, to rozważyć ciąg liczb postaci
   $$x_N = (\operatorname{sgn}(y_1), \operatorname{sgn}(y_2), \ldots, \operatorname{sgn}(y_N), 0, 0, \ldots) \in c_0$$
   i pokazać, że $\| \varphi \| \geq \sum_{n=1}^{N} |y_n|$,

   (e) wywnioskować, że $y = (y_n) \in l^1$ oraz $\| \varphi \| \geq \| y \|_1$,

   (f) wywnioskować, że $X^* = l^1$.

2. Wykazać, że iloczyn skalarny na przestrzeni unitarnej jest ograniczoną formą półtoraliniową.

3. Formę półtoraliniową na przestrzeni Hilberta H nad ciałem zespolonym nazywamy *hermitowską* jeżeli spełnia ona warunek
   $$\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$$
   dla dowolnych $x, y \in H$. Pokazać, że ograniczona forma hermitowska jest postaci
   $$\varphi(x, y) = \langle x, Ay \rangle$$
   gdzie A jest ograniczonym operatorem samosprzężonym na H, tzn. takim że $A^* = A$.

4. Pokazać, że dla $A, B \in B(H)$ zachodzą równości

   (a) $(A + B)^* = A^* + B^*$

   (b) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$

   (c) $(AB)^* = B^* A^*$

(d) $(A^*)^* = A$.

5. Pokazać, że $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, jeśli $A \in B(H)$ jest operatorem odwracalnym.

6. Pokazać, że dla $A \in B(H)$ zachodzą równości norm:

   (a) $\| A^* \| = \| A \|$,

   (b) $\| AA^* \| = \| A^*A \| = \| A \|^2$

7. Niech $A \in B(H)$ będzie operatorem spełniającym $A(M_1) \subset M_2$, gdzie M_1, M_2 domknięte podprzestrzenie przestrzeni H. Pokazać, że $A^*(M_2^\perp) \subset M_1^\perp$.

8. Pokazać, że dla $A \in B(H)$, zachodzą zależności
$$\mathrm{Ker}(A) = (\mathrm{Im}(A^*))^\perp \qquad \mathrm{Im}(A) \subset (\mathrm{Ker}(A^*))^\perp$$

9. Wyznaczyć operator sprzężony do operatora $M_g \in B(H)$, gdzie $H = L^2(X, \mu)$ zadanego wzorem
$$(M_g f)(x) = g(x)f(x)$$
gdzie $g \in L^\infty(X, \mu)$ Wyznaczyć operator sprzężony do M_g (rozpatrujemy przestrzenie nad ciałem zespolonym).

10. Znaleźć operator sprzężony do operatora $A \in B(H)$, gdzie $H = L^2[0, 1]$, zadanego wzorem
$$(Af)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$$
gdzie $K \in C([0, 1] \times [0, 1])$ (rozpatrujemy przestrzenie nad ciałem zespolonym).

11. Znaleźć operator sprzężony do operatora $T \in B(H)$, gdzie $H = L^2[0, 1]$, zadanego wzorem
$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y) dy$$
(rozpatrujemy przestrzenie nad ciałem rzeczywistym).

R. Lenczewski